

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen

2. Klausur WS 95/96

1 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x^3 - 9x^2 + 24x - 16}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 8x^2 + 3}{9x^4 - 3x^2 + x}$

2.1 Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(x) dx$$

2.2 Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

2.3 Bestimmen Sie $\text{grad}(f(\mathbf{x}))$ für die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 \sin(x_2) + \ln(\sqrt{x_3}) - \frac{1}{x_1 x_2 x_3}.$$

3.1 Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 \ln(x^2) - 2x^2.$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema von f .

3.2 Ermitteln Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die stationären Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen $x_1 + 2x_2 = 0$ und $2x_1 - x_3 = 1$.

4 Die Funktion $f: x \mapsto f(x) = y$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

Bestimmen Sie f durch Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $f(1) = 2$.

5 Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ \sin(x_1 x_2) \\ \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix},$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto g(\underline{y}) = z = e^{\cos y_1} + \ln(\sqrt{y_2}) + y_3^5.$$

a) Bestimmen Sie die Funktionalmatrizen

$$D_f := \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) \quad \text{und} \quad D_g := \left(\frac{\partial z}{\partial y_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3).$$

b) Geben Sie unter Verwendung der mehrdimensionalen Kettenregel die folgende Matrix an:

$$D_{g \circ f} := (g \circ f)'(\underline{x}) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3).$$

6 Ein Betrieb stellt drei Erzeugnisse her, die auf vier Maschinen bearbeitet werden. Die Maschinenzeit je Erzeugniseinheit und die Produktionsmenge sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Maschine	Maschinenzeit je Einheit des Erzeugnisses; (ZE/ME)			
	1	2	3	
1	3	7	2	= A
2	1	4	3	
3	2	3	5	
4	6	1	4	
Produktionsmenge (ME)	x_1	x_2	x_3	

Berechnen Sie und interpretieren Sie die folgenden Größen.

Dabei ist x in b) und c) gegeben durch $x = (x_1, x_2, x_3) = (100, 30, 150)$.

a) $(1 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot A$

b) $A \cdot x^T$

c) $(1 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot A \cdot x^T$

7.1 Sei $M = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, daß M eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.
- b) Stellen Sie $v = (1, -2, 5)$ als Linearkombination der neuen Basisvektoren dar.

7.2

- a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathcal{U} = \{(a, b, c, d) \mid b + c + d = 0\}$ ein Unterraum des \mathbb{R}^4 ist.
- b) Geben Sie die Dimension und eine Basis von \mathcal{U} an.

8.1 Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie alle x für die gilt: $BB^T = B^T B$.

8.2 Geben Sie die Lösungsmenge des Systems an:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\2x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

8.3 Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie die folgenden Größen an:

- a) $\det(A)$
- b) $\det(A^{-1})$
- c) $\det(A^{-1} \cdot B)$
- d) $\text{Rang}(A \cdot B)$

8.4 Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimmen Sie die Inverse von A .
- b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.