Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

2. Klausur WS 1999/2000 Hamburg, 30.03.2000

$\boxed{1}$ 6 Punkte

Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$x + ky = 1, \qquad kx + y = 1$$

unlösbar, eindeutig lösbar bzw. mehrdeutig lösbar? Begründung!

$\boxed{2}$ 5 Punkte

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$, bestehend aus den Spalten $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$:

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

b) Geben Sie weiterhin die Determinante der Matrizen

$$\mathbf{B} = (\lambda \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \mathbf{0}), \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

an.

$\boxed{3}$ 8 Punkte

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 17.5 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den Spaltenraum von $\mathbf{A}$ ($=\text{sp}(\mathbf{A})$) an.

b) Bestimmen Sie $\dim(\text{sp}(\mathbf{A}))$, und untersuchen Sie, ob $\mathbf{b} \in \text{sp}(\mathbf{A})$.

c) Welche Bedeutung hat das Ergebnis von b) für die Frage nach der Lösbarkeit von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$?

$\boxed{4}$ 13 Punkte

In einem landwirtschaftlichen Betrieb werden Kühe und Schafe gehalten. In den Stallungen ist Platz für maximal 50 Kühe und 200 Schafe. Ferner verfügt der Betrieb über 72 Morgen Weideland. Für eine Kuh werden 1 Morgen, für ein Schaf 0.2 Morgen Land Weidefläche eingeplant. Zur Versorgung der Tiere sind Arbeitskräfte vorhanden, die für jährlich 10 000 Stunden zur Verfügung stehen. Im Laufe eines Jahres erfordert eine Kuh etwa 150 Arbeitsstunden. Für die Haltung eines Schafes sind hingegen nur etwa 25 Arbeitstunden jährlich erforderlich. Der erzielte Reingewinn beträgt pro Kuh 500 DM, pro Schaf 90 DM.
Wieviele Kühe und Schafe sind zu halten, damit ein maximaler Jahresgewinn erzielt wird?
Geben Sie eine mathematische Formulierung des Optimierungsproblems an und lösen Sie es mit Hilfe des Simplex-Algorithmus'!

$\boxed{5}$ 10 Punkte

Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 16 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

b) Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

   1) $\mathbf{A}$ ist regulär.

   2) $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar.

   3) Der Rang von $\mathbf{A}$ ist kleiner als 3.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$.

d) Existiert die Inverse von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$? Begründung! Bestimmen Sie diese Inverse, falls sie existiert.

$\boxed{6}$ 9 PUNKTE

Die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem eines Unterraumes U des $\mathbb{R}^4$.

a) Welche Dimension hat U?

b) Bestimmen Sie eine Teilmenge der gegebenen Vektoren, die eine Basis von U ist.

c) Stellen Sie jeden der übrigen Vektoren als Linearkombination der in b) bestimmten Basisvektoren dar.

$\boxed{7}$ 9 PUNKTE

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

b) Geben Sie den zugehörigen Nullraum an!

c) Welche Dimension hat der Nullraum?

d) Geben Sie eine Basis des Nullraumes an!